8A Anna Dugan 1

Bundesgymnasium und Bundesrealgymnasium und
Wirtschaftskundliches Bundesrealgymnasium
1100 Wien, Laaer Berg-Straße 25-29 910036

1.) Wahrscheinlichkeitsrechnung

a) Auf Grund einer Untersuchung wurde festgestellt, dass 15% der verwendeten Mopeds nicht den technischen Vorschriften der Straßenverkehrsordnung entsprechen, also defekt sind.

1) Von einem Polizisten wurden 25 Mopeds kontrolliert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 3 defekte darunter sind?

$P(H<3) = P(H=0)+P(H=1)+P(H=2) = \binom{25}{0}\cdot(0{,}15)^0\cdot(0{,}85)^{25} + \binom{25}{1}\cdot(0{,}15)^1\cdot(0{,}85)^{24} +$

$\binom{25}{2}\cdot(0{,}15)^2\cdot(0{,}85)^{23} = 0{,}017197809 + 0{,}07587269 + 0{,}160671579 = 0{,}25374208 \approx \underline{\underline{25{,}37\%}}$ ✓

A: Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 25,37%. ✓

2) Wie viele Mopeds müssen kontrolliert werden, damit mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein defektes Moped dabei ist?

$P(H\geq 1)\geq 0{,}99$ ✓

$1-P(H=0)\geq 0{,}99$

$1-\binom{n}{0}\cdot(0{,}15)^0\cdot(0{,}85)^n \geq 0{,}99$ ✓

$1-(0{,}85)^n \geq 0{,}99 \quad |-1 \quad |\cdot(-1)$

$0{,}85^n \leq 0{,}01 \quad |\log$

$n\log 0{,}85 \leq \log 0{,}01 \quad |:\log 0{,}85$

$n \geq \frac{\log 0{,}01}{\log 0{,}85}$

$\underline{\underline{n \geq 28{,}33620797}}$ ✓

A: Es müssen mindestens 29 Mopeds kontrolliert werden. ✓

b) Die Lebensdauer von Mopedreifen ist normalverteilt mit $\sigma = 450$ km, $\mu = 5500$ km

1) In welchem Bereich liegt die Lebensdauer eines Reifens mit 95%iger Wahrscheinlichkeit?

$2\Phi(z)-1 = 0{,}95$ ✓

$2\Phi(z) = 1{,}95$

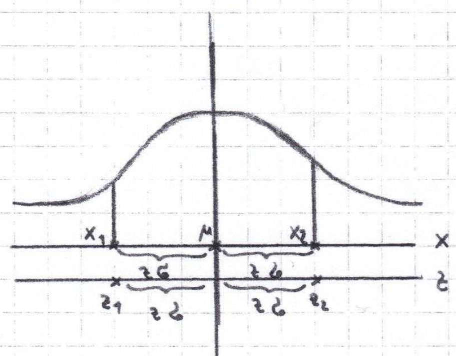
$\Phi(z) = 0{,}975$

$z = 1{,}96$

$x_1 = \mu - z\sigma = 5500 - 1{,}96\cdot 450 = 4618$

$x_2 = \mu + z\sigma = 5500 + 1{,}96\cdot 450 = 6382$

$\underline{\underline{[x_1, x_2] = [4618; 6382]}}$ ✓



A: In dem Bereich zwischen 4618 km und 6382 km. ✓

Anna Dugan 2

2) Wie groß muss die mittlere Lebensdauer einer Produktionsserie sein, damit bei gleicher Standardabweichung höchstens 2% der Reifen eine Lebensdauer von weniger als 4600km haben?

$\phi(z) = 0{,}02$
$z = -2{,}05$ ✓

$\mu = x - z\sigma = 4600 - (-2{,}05)\cdot(450) = 5522{,}5$ ✓

A: Die mittlere Lebensdauer muss 5522,5 km sein. ✓

2.) Lösen von Gleichungssystemen, Differential- und Integralrechnung

Der Graph einer Polynomfunktion vom Grad 3 hat an der Stelle −1 ein Maximum, den Wendepunkt W(1/16) und schneidet die 1. Achse bei x=3.

a) Zeige, dass die Gleichung der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$ lautet, gib beim Aufstellen der notwendigen Bedingungen ihre Bedeutung an!

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$ ✓

I $f(3)=0$ ✓ $\Rightarrow a\cdot 3^3 + b\cdot 3^2 + c\cdot 3 + d = 0$
II $f(1)=16$ ✓ $\Rightarrow a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = 16$
III $f'(-1)=0$ ✓ $\Rightarrow 3a\cdot(-1)^2 + 2b\cdot(-1) + c = 0$
IV $f''(1)=0$ ✓ $\Rightarrow 6a\cdot 1 + 2b = 0$ ✓

I $27a + 9b + 3c + d = 0$
II $a + b + c + d = 16$] −

I' $26a + 8b + 2c = -16$

I' $26a + 8b + 2c = -16$ | $\cdot(-1)$
III $3a - 2b + c = 0$ | $\cdot 2$

I' $-26a - 8b - 2c = 16$
III $6a - 4b + 2c = 0$] +

II' $-20a - 12b = 16$

II' $-20a - 12b = 16$
IV $6a + 2b = 0$ | $\cdot 6$

II' $-20a - 12b = 16$
IV $36a + 12b = 0$

$16a = 16$
$a = 1$ ✓

a in IV

$6\cdot 1 + 2b = 0$
$2b = -6$
$b = -3$ ✓

a und b in III

$3\cdot 1 - 2\cdot(-3) + c = 0$

$3 + 6 + c = 0$
$c = -9$ ✓

a, b und c in II

$1 - 3 - 9 + d = 16$
$-11 + d = 16$
$d = 27$ ✓

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$

Anna Dugan 3

b) Berechne die Fläche, die von der Kurve und der 1. Achse eingeschlossen wird. Welche Überlegungen musst du dabei treffen.

Nullstellen: $x^3-3x^2-9x+27=0$ $\quad x_1=3$

$(x^3-3x^2-9x+27):(x-3)=x^2+0-9$

$\underline{-x^3+3x^2}$

$0x^2-9x$

$\underline{0+0}$

$-9x+27$

$\underline{+9x-27}$

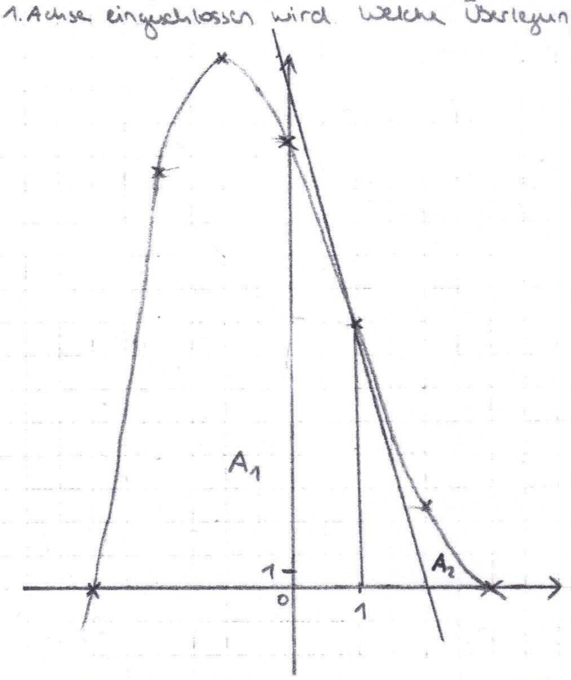
0R

$x^2-9=0$

$x^2=9$

$x=\sqrt{9}$

$x_2=-3$



$\int_{-3}^{3} f(x) = \int_{-3}^{3} x^3-3x^2-9x+27\,dx = \frac{x^4}{4}-x^3-4{,}5x^2+27x\Big|_{-3}^{3} = \left(\frac{3^4}{4}-3^3-4{,}5\cdot 3^2+27\cdot 3\right)-\left(\frac{(-3)^4}{4}-(-3)^3-\right.$

$\left.4{,}5\cdot(-3)^2+27(-3)\right)=33{,}75-(-74{,}25)=108$

$\underline{\underline{A=108}}$

A: Bevor ich die Fläche integrieren darf muss ich die Nullstellen berechnen. Danach muss ich sicherstellen, ~~dass~~ ob der ganze Flächeninhalt entweder oberhalb oder unterhalb der x-Achse ist. Sollte er teilweise ober- und teilweis unterhalb der x-Achse sein, muss ich alle Stücke einzeln integrieren, da sich die Flächenstücke unter- und oberhalb der x-Achse sonst aufheben. Sollte der ganze Flächeninhalt unterhalb der x-Achse sein, so muss ich den Betrag des (negativen) Ergebnisses nehmen, da ein Flächeninhalt niemals negativ sein kann.

c) In welchem Verhältnis teilt die Wendetangente die Kurve?

$f'(1)=-12$

w: $y=k\cdot x+d$ $\qquad 16=-12\cdot 1+d$ $\qquad$ Nullstelle: $0=-12x+28$

$y=-12\cdot x+d$ $\qquad 28=d$ $\qquad 12x=28$

$x=\frac{7}{3}$

w: $y=-12x+28$

$A_2: \int_{1}^{3} f(x) = \int_{1}^{3} x^3-3x^2-9x+27\,dx = \frac{x^4}{4}-x^3-4{,}5x^2+27x\Big|_{1}^{3} = 33{,}75-\left(\frac{1^4}{4}-1^3-4{,}5\cdot 1^2+27\right)$

$33{,}75-(21{,}75)=12$

$A_2=12-A_\Delta=12-\left(\frac{(f_1-0)\cdot(\frac{7}{3}-1)}{2}\right)=12-\left(\frac{16\cdot\frac{4}{3}}{2}\right)=12-\frac{32}{3}=\frac{36}{3}-\frac{32}{3}=\frac{4}{3}$

$A_1: \int_{-3}^{1} f(x) = x^3-3x^2-9x+27\,dx = \frac{x^4}{4}-x^3-4{,}5x^2+27x\Big|_{-3}^{1} = 21{,}75-(-74{,}25)=96$

$A_1=96+A_\Delta=96+\frac{32}{3}=\frac{288}{3}+\frac{32}{3}=\frac{320}{3}$

$A_1:A_2=\frac{320}{3}:\frac{4}{3}=320:4=\underline{\underline{80:1}}$

3.) Vektorrechnung – Analytische Geometrie in der Ebene und im Raum Anna Dugan 4

a) Die Angaben von 3 Punkten in der Ebene kann für verschiedene Aufgabenstellungen verwendet werden. Gegeben sind 3 Punkte

$A(-9|-5)$, $B=(5|-5)$, $C=(12|16)$

1) Interpretiere diese Punkte als Umkreis des Dreiecks ABC oder als Kreis durch A, B, und C! Berechne die Kreisgleichung!

$s_{AB} = M_{AB} + t\cdot\vec{n}_{AB}$ ✓ $\quad M_{AB} = \frac{1}{2}\cdot(A+B) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}-9\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-4\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$

$s_{AB} = \begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ ✓ $\quad \vec{AB} = B-A = \begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-9\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\0\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{n}_{AB} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

$s_{AC} = M_{AC} + u\cdot\vec{n}_{AC}$ ✓ $\quad M_{AC} = \frac{1}{2}\cdot(A+C) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}-9\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12\\16\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3\\11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}5\\5{,}5\end{pmatrix}$

$s_{AC} = \begin{pmatrix}1{,}5\\5{,}5\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ✓ $\quad \vec{AC} = C-A = \begin{pmatrix}12\\16\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-9\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\21\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \vec{n}_{AC} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ✓

$s_{AB} \cap s_{AC}$

$\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}5\\5{,}5\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad]+$

$-7 - t = 7$

$-t = 14$

$t = -14$

$U = \begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix} + (-14)\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\9\end{pmatrix}$ ✓

$r = \overline{UB} = |\vec{UB}| = |B-U| = \left|\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\9\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}7\\-14\end{pmatrix}\right| =$

$\sqrt{7^2+(-14)^2} = \sqrt{49+196} = \sqrt{245}$ ✓

$k: (x-m_1)^2 + (y-m_2)^2 = r^2$ ✓

$\underline{\underline{(x+2)^2 + (y-9)^2 = 245}}$ ✓

2) Stelle in B und C Tangenten auf und berechne deren Winkel!

$t_B: (x+2)\cdot(5+2) + (y-9)\cdot(-5-9) = 245$ ✓ $\quad t_C: (x+2)\cdot(12+2) + (y-9)\cdot(16-9) = 245$

$7x + 14 + (-14)y + 126 = 245$ ✓ $\quad 14x + 28 + 7y - 63 = 245$ ✓

$7x - 14y = 105 \quad t_C: 14x + 7y = 280$

$x - 2y = 15$ ✓ $\quad t_C: 2x + y = 40$

$y = \frac{1}{2}x - 7{,}5 \quad y = -2x + 40$ ✓

$\cos\varphi = \frac{\vec{t_b}\cdot\vec{t_c}}{|\vec{t_b}|\cdot|\vec{t_c}|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\0{,}5\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right|} = \frac{1-1}{\sqrt{1^2+(0{,}5)^2}\cdot\sqrt{1+(-2)^2}} = \frac{0}{\sqrt{6{,}25}} = \frac{0}{2{,}5} = 0$ ✓

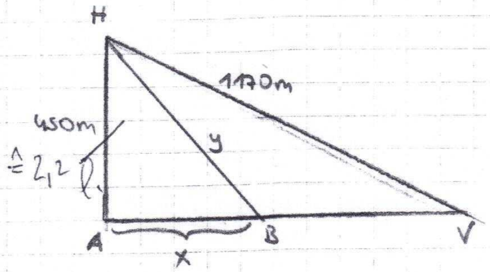
$\underline{\varphi = 90°}$ ✓

Anna Dugan 5

4.) Differentialrechnung - Extremwertaufgabe

H: Abstand zu Straße = 450 m   V: an Straße, Luftlinie zu Haus: 1170m

a) Fertige eine Zeichnung der Aufgabe an! Maßstab 1:20000



Maßstab: 1:20000

$\overline{AV} = \sqrt{450^2+1170^2}$

$= \sqrt{1166400}$

$\overline{AV} = 1080$

HB: $K(x)$ min = ?

$K(x) = (1080-x)\cdot 50 + y \cdot 150$

NB: $y = \sqrt{450^2+x^2}$

NB in HB

$K(x) = (1080-x)\cdot 50 + \sqrt{450^2+x^2}\cdot 150$

$= 54000 - 50x + 150\cdot(450^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$

$K'(x) = -50 + \frac{150}{2}\cdot 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{450^2+x^2}}$

$K'(x) = \frac{150x}{\sqrt{450^2+x^2}} - 50$

$E: K'(x) = 0$

$150x = 50 \cdot \sqrt{450^2+x^2} \quad |\uparrow^2$

$22500x^2 = 2500\cdot(450^2+x^2)$

$22500x^2 = 506250000 + 2500x^2$

$20000x^2 = 506250000$

$x^2 = 25312{,}5$

$x = 159{,}0990258 \approx \underline{\underline{159{,}1\ m}}$

$y = \sqrt{450^2+x^2} = 477{,}2970773 \approx 477{,}3\ m$

$K(159{,}09\ldots) = (1080-159{,}09\ldots)\cdot 50 + 477{,}29\ldots \cdot 150 = 117639{,}6103€ \approx 117639{,}61€$

Anna Dugan 6

uftlinie: $1170 \cdot 150 = 175500$ €

sparnis: $175500€ - 117639{,}61... € = 57\,860{,}38969 € \approx \underline{\underline{57860{,}39 €}}$

A: Die Kostenersparnis beträgt 57860,39€.

b) Geg.: $P(0/2/3)$, $Q(4/4/3)$, $R(6/2/5)$

1) Unter welcher Bedingung ist eine Ebene durch 3 Punkte festgelegt? Zeige, dass diese Bedingung für die gegebenen Punkte erfüllt ist.

P, Q und R spannen eine Ebene auf, wenn $\vec{PQ} \nparallel \vec{PR}$

$\vec{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$

$\vec{PR} = R - P = \begin{pmatrix}6\\2\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}$

$\vec{PQ} \parallel \vec{PR}$?

$\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}$

$r_1 = 2/3$
$r_2 =$
$r_3 = 0$

$r_1 \neq r_2 \neq r_3 \Rightarrow \vec{PQ} \nparallel \vec{PR} \Rightarrow$ P, Q und R spannen eine Ebene auf

2) Gib zwei weitere Darstellungsmöglichkeiten für diese Ebene an!

$\underline{\underline{E: X = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}}}$

$x = 0 + 4t + 6u$
$y = 2 + 2t$
$z = 3 \quad + 2u$

$x = 0 + 4t + 6u$
$y = 2 + 2t \quad | \cdot (-2)$

$x = 0 + 4t + 6u \quad]+$
$-2y = -4 - 4t$

$x - 2y = -4 + 6u$

$x - 2y = -4 + 6u$
$z = 3 + 2u \quad | \cdot (-3)$

$x - 2y = -4 + 6u \quad]+$
$-3z = -9 - 6u$

$\underline{\underline{x - 2y - 3z = -13}}$